

## 節点剛性と変形の影響を考慮せる一般トラス橋の厳密解法とその計算方法について(第1報)

その他（別言語等） のタイトル	On the Exact Solution and the Calculating Method of the General Truss Bridge with Special Reference to the Rigidity of its Panel Points and the Deformation of its Members (No.1)
著者	中村 作太郎
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	4
号	1
ページ	111-125
発行年	1962-06-30
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3166">http://hdl.handle.net/10258/3166</a>

# 節点剛性と変形の影響を考慮せる一般トラス橋の 厳密解法とその計算方法について (第1報)

中 村 作 太 郎

## On the Exact Solution and the Calculating Method of the General Truss Bridge with Special Reference to the Rigidity of its Panel Points and the Deformation of its Members (No. 1)

Sakutaro Nakamura

### Abstract

This paper is written regarding the fact that the present writer induced the fundamental solution of the truss bridge on the theory of deformation including the overloading case, taking into consideration the rigidity of panel points and the deformation of members, and that he made the analytical equations of the stress, the end moment and the shear of any member and induced the general solution of the deflection at any point of the truss bridge by the virtual-work's law of deformation, referring to the exact calculating method of them.

### 1. 緒 言

最近、トラス橋における節点の部材結合は主として鉚結または溶接結合の混用の事が多く単純なピン結合を用いる事は極めて少ない。また将来は完全な溶接結合に移行する可能性も充分考えられる。然るに従来は、これらの節点剛性の中途半端なトラス橋の計算に、節点を完全な鉸と仮定せる単純トラス橋の解法を用いたり、また節点を完全なる剛結と仮定せる剛節不静定トラスの解法をそのまま用いたりしているが、これらは何れも妥当ではなく、当然節点剛性の度合を考慮すべきであると思う。また過荷重を受け変形量が大きくなった場合を考慮すれば従来のように変形を無視せる単純なる解法は到底当嵌まらない事になる。これは著者等が節点剛性と変形の影響を調べるため行なったトラス橋の模型実験<sup>1)</sup>の結果より見ても明かなところである。

先に、小西博士<sup>2)</sup>が“一般剛節構造物の解法及びその極限状態附近における性状について”と題し、平面剛節構造物の解法と考察について、土木学会論文集に発表しているが、著者は更にこれを拡張し、節点剛性の影響を考慮し、ピン結合より剛節結合まで含む一般トラス橋について厳密解法を試みた。すなわち、本文は節点の剛性を考慮に入れ、過荷重を受ける場合をも包含した相対変形理論によってトラスの基礎方程式をたて、これによって、部材応力、材

端曲げモーメント、剪断力などを求める解式を誘導し、更にトラスの任意の点におけるタワミを求める一般解式を可能変形法則に基づいて誘導し、部材応力、材端曲げモーメント、剪断力、タワミなどについての厳密計算方法を述べんとするものである。

## 2. 一般トラス橋における基礎方程式の誘導

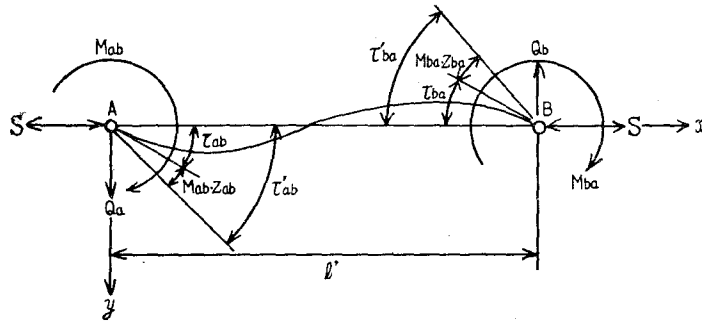
### A. 任意の一部材におけるタワミ曲線、タワミ角、材端モーメント、剪断力の誘導

第1回において、任意の圧縮材（または引張材）ABの圧縮力（または引張力）を $S$ 、端モーメントを $M_{ab}$ 、 $M_{ba}$ とすれば、タワミ曲線は次式の通りになる。

$$y = \frac{M_{ab}}{S} \left\{ \frac{\sin k(l'-x)}{\sin kl'} - \frac{l'-x}{l'} \right\} + x \cdot \tan(M_{ab} \cdot Z_{ab}) - \frac{M_{ba}}{S} \left\{ \frac{\sin kx}{\sin kl'} - \frac{x}{l'} \right\} - (l'-x) \tan(M_{ba} \cdot Z_{ba}) \quad (1)$$

但し  $k = \sqrt{\frac{S}{EI}}$

$I =$  圧縮材（または引張材）ABの断面二次モーメント



第1図 一部材における基礎変形の図

従って、支点AおよびBにおけるタワミ角は(1)式のタワミ曲線を参照し、圧縮材では、(2), (3)式、引張材では、(4), (5)式によって表わす事が出来る。

圧縮材においては

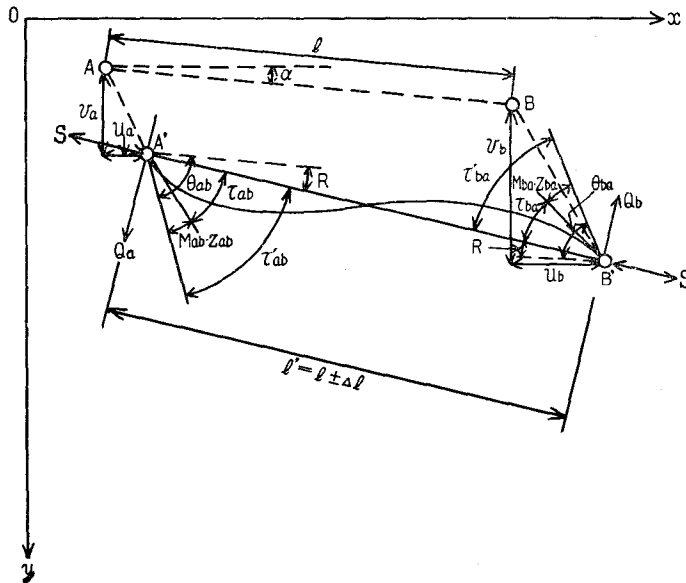
$$\left. \begin{aligned} \tau'_{ab} &= \tau_{ab} + \Delta_{ab} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba}) + M_{ab} \cdot Z_{ab} \\ \tau'_{ba} &= \tau_{ba} + \Delta_{ba} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab}) + M_{ba} \cdot Z_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } K &= \frac{I}{l'} = \text{剛度} \\ \varphi &= \frac{6}{kl'} \left( \frac{1}{\sin kl'} - \frac{1}{kl'} \right) \\ \psi &= \frac{3}{kl'} \left( \frac{1}{kl'} - \frac{1}{\tan kl'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

引張材においては

$$\left. \begin{aligned} \tau'_{ab} &= \tau_{ab} + \Delta_{ab} = \frac{1}{6EK} (2\Psi M_{ab} - \Phi M_{ba}) + M_{ab} Z_{ab} \\ \tau'_{ba} &= \tau_{ba} + \Delta_{ba} = \frac{1}{6EK} (2\Psi M_{ba} - \Phi M_{ab}) + M_{ba} Z_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } K &= \frac{I}{l'} = \text{剛度} \\ \Phi &= \frac{6}{kl'} \left( \frac{1}{kl'} - \frac{1}{\sinh kl'} \right) \\ \Psi &= \frac{3}{kl'} \left( \frac{1}{\tanh kl'} - \frac{1}{kl'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



第2図 トラス橋の任意の一部材についての載荷前後における相対変位図

第2図の如く、任意の圧縮材（または引張材）ABの変形前の位置をAB，変形後の位置をA'B'とすれば、A'B'については、(2)式（または(3)式）をそのまま用いる事が出来る。

また、幾何学的関係より、

$$\left. \begin{aligned} \tau'_{ab} + R &= \tau_{ab} + M_{ab} Z_{ab} + R = \theta_{ab} \\ \tau'_{ba} + R &= \tau_{ba} + M_{ba} Z_{ba} + R = \theta_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式に(2)および(3)式を用いれば圧縮材に関する(7)式が得られ、また(4)および(5)式を用いれば引張材に関する(8)式が得られる。すなわち

圧縮材 AB については

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ab} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba} + 6EK \cdot M_{ab} Z_{ab} + 6EKR) \\ \theta_{ba} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab} + 6EK \cdot M_{ba} Z_{ba} + 6EKR) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

引張材 AB については

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ab} &= \frac{1}{6EK} (2\Psi M_{ab} - \Phi M_{ba} + 6EK \cdot M_{ab} Z_{ab} + 6EKR) \\ \theta_{ba} &= \frac{1}{6EK} (2\Psi M_{ba} - \Phi M_{ab} + 6EK \cdot M_{ba} Z_{ba} + 6EKR) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

そこで、(7)式または(8)式をそれぞれ、端モーメント  $M$  について解けば、圧縮材については、(11)および(12)式、引張材については、(15)および(16)式が得られる。すなわち、

圧縮材 AB については、(7)式より

$$6EK \cdot \theta_{ab} = 2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba} + 6EK \cdot M_{ab} \cdot Z_{ab} + 6EKR$$

故に

$$M_{ab} (2\psi + 6EK \cdot Z_{ab}) - \varphi M_{ba} = 6EK (\theta_{ab} - R) \quad (9)$$

また

$$6EK \cdot \theta_{ba} = 2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab} + 6EK M_{ba} Z_{ba} + 6EKR$$

故に

$$\varphi M_{ab} - M_{ba} (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) = 6EK (R - \theta_{ba}) \quad (10)$$

$$(9) \times (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - (10) \times \varphi$$

$$\begin{aligned} M_{ab} \{ (2\psi + 6EK \cdot Z_{ab}) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - \varphi^2 \} \\ = 6EK (\theta_{ab} - R) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - 6EK (R - \theta_{ba}) \cdot \varphi \end{aligned}$$

故に

$$M_{ab} = \frac{6EK \{ (\theta_{ab} - R) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) + (\theta_{ba} - R) \varphi \}}{(2\psi + 6EK \cdot Z_{ab}) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - \varphi^2} \quad (11)$$

更に

$$\begin{aligned} (9) \times \varphi - (10) \times (2\psi + 6EK Z_{ab}) \\ - M_{ba} \{ \varphi^2 + (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ab}) \} \\ = 6EK \{ (\theta_{ab} - R) \varphi - (R - \theta_{ba}) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ab}) \} \end{aligned}$$

故に

$$M_{ba} = - \frac{6EK \{ (\theta_{ab} - R) \varphi + (\theta_{ba} - R) (2\psi + 6EK Z_{ab}) \}}{\varphi^2 + (2\psi + 6EK \cdot Z_{ba}) (2\psi + 6EK \cdot Z_{ab})} \quad (12)$$

引張材 AB については、(8)式より

$$6EK \cdot \theta_{ab} = 2\Psi M_{ab} - \Phi M_{ba} + 6EK \cdot M_{ab} Z_{ab} + 6EKR$$

故に

$$M_{ab} (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ab}) - \Phi M_{ba} = 6EK (\theta_{ab} - R) \quad (13)$$

また

$$6EK \theta_{ba} = 2\Psi M_{ba} - \Phi M_{ab} + 6EK \cdot M_{ba} Z_{ba} + 6EKR$$

故に

$$\Phi M_{ab} - M_{ba} (2\Psi + 6EK Z_{ba}) = 6EK (R - \theta_{ba}) \quad (14)$$

$$(13) \times (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - (14) \times \Phi$$

$$\begin{aligned} M_{ab} \{ (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ab}) (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - \Phi^2 \} \\ = 6EK \{ (\theta_{ab} - R) (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ba}) - (R - \theta_{ba}) \Phi \} \end{aligned}$$

故に

$$M_{ab} = \frac{6EK \{ (\theta_{ab} - R) (2\Psi + 6EK Z_{ba}) + (\theta_{ba} - R) \Phi \}}{(2\Psi + 6EK Z_{ab}) (2\Psi + 6EK Z_{ba}) - \Phi^2} \quad (15)$$

更に

$$(13) \times \Phi - (14) \times (2\Psi + 6EK Z_{ab})$$

$$\begin{aligned} -M_{ba} \{ \Phi^2 + (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ba}) (2\Psi + 6EK Z_{ab}) \} \\ = 6EK \{ (\theta_{ab} - R) \Phi - (R - \theta_{ba}) (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ab}) \} \end{aligned}$$

故に

$$M_{ba} = - \frac{6EK \{ (\theta_{ab} - R) \Phi + (\theta_{ba} - R) (2\Psi + 6EK Z_{ab}) \}}{(2\Psi + 6EK Z_{ba}) (2\Psi + 6EK Z_{ab}) + \Phi^2} \quad (16)$$

次に、剪断力  $Q$  は、第2図において、モーメントの釣合条件より次の通りになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_a &= \frac{1}{l} (M_{ab} + M_{ba}) \\ Q_b &= -Q_a \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

故に、圧縮材 AB については、(11), (12) 式を用い次式が得られる。

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{1}{l} \left[ \frac{6EK \{ (\theta_{ab} - R) (2\psi + 6EK Z_{ba}) + (\theta_{ba} - R) \varphi \}}{(2\psi + 6EK Z_{ab}) (2\psi + 6EK Z_{ba}) - \varphi^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6EK \{ (\theta_{ab} - R) \varphi + (\theta_{ba} - R) (2\psi + 6EK Z_{ab}) \}}{(2\psi + 6EK Z_{ba}) (2\psi + 6EK Z_{ab}) + \varphi^2} \right] \\ &= \frac{6EK}{l} \left[ \frac{(\theta_{ab} - R) (2\psi + 6EK Z_{ba}) + (\theta_{ba} - R) \varphi}{(2\psi + 6EK Z_{ab}) (2\psi + 6EK Z_{ba}) - \varphi^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\theta_{ab} - R) \varphi + (\theta_{ba} - R) (2\psi + 6EK Z_{ab})}{(2\psi + 6EK Z_{ba}) (2\psi + 6EK Z_{ab}) + \varphi^2} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

$$Q_b = -Q_a = -\frac{6EK}{l'} \left[ \frac{(\theta_{ab}-R)(2\psi+6EKZ_{ba})+(\theta_{ba}-R)\varphi}{(2\psi+6EKZ_{ab})(2\psi+6EKZ_{ba})-\varphi^2} - \frac{(\theta_{ab}-R)\varphi+(\theta_{ba}-R)(2\psi+6EKZ_{ab})}{(2\psi+6EKZ_{ba})(2\psi+6EKZ_{ab})+\varphi^2} \right] \quad (19)$$

また、引張材 AB については、(15), (16) 式を (17) 式に用い

$$Q_a = \frac{6EK}{l'} \left\{ \frac{(\theta_{ab}-R)(2\psi+6EKZ_{ba})+(\theta_{ba}-R)\Phi}{(2\psi+6EKZ_{ab})(2\psi+6EKZ_{ba})-\Phi^2} - \frac{(\theta_{ab}-R)\Phi+(\theta_{ba}-R)(2\psi+6EKZ_{ab})}{(2\psi+6EKZ_{ba})(2\psi+6EKZ_{ab})+\Phi^2} \right\} \quad (20)$$

$$Q_b = -Q_a = -\frac{6EK}{l'} \left\{ \frac{(\theta_{ab}-R)(2\psi+6EKZ_{ba})+(\theta_{ba}-R)\Phi}{(2\psi+6EKZ_{ab})(2\psi+6EKZ_{ba})-\Phi^2} - \frac{(\theta_{ab}-R)\Phi+(\theta_{ba}-R)(2\psi+6EKZ_{ab})}{(2\psi+6EKZ_{ba})(2\psi+6EKZ_{ab})+\Phi^2} \right\} \quad (21)$$

上述のように、剪断力  $Q_a$ ,  $Q_b$  を求めるには、圧縮材では (18), (19) 式、引張材では (20), (21) 式を用いて計算すればよい。然るに、既にあげた (1)~(21) 式には、総べて、節点の接合係数<sup>3), 4)</sup>,  $Z_{ab}$ ,  $Z_{ba}$  が含まれている事に注意しなければならない。すなわち、タワミ曲線、タワミ角、材端モーメント、剪断力の何れを計算するにも、係数  $Z_{ab}$ ,  $Z_{ba}$  (正確に云うと、単位モーメントによる角変化を意味する) を決定するのが先決問題である。 $Z_{ab}$ ,  $Z_{ba}$  は、剛節、鉸節によって次の如く表わす事が出来る。すなわち、

剛節とすれば

$$Z_{ab} = \frac{A_{ab}}{M_{ab}} = 0, \quad Z_{ba} = \frac{A_{ba}}{M_{ba}} = 0$$

鉸節とすれば

$$Z_{ab} = \frac{A_{ab}}{M_{ab}} = \infty, \quad Z_{ba} = \frac{A_{ba}}{M_{ba}} = \infty$$

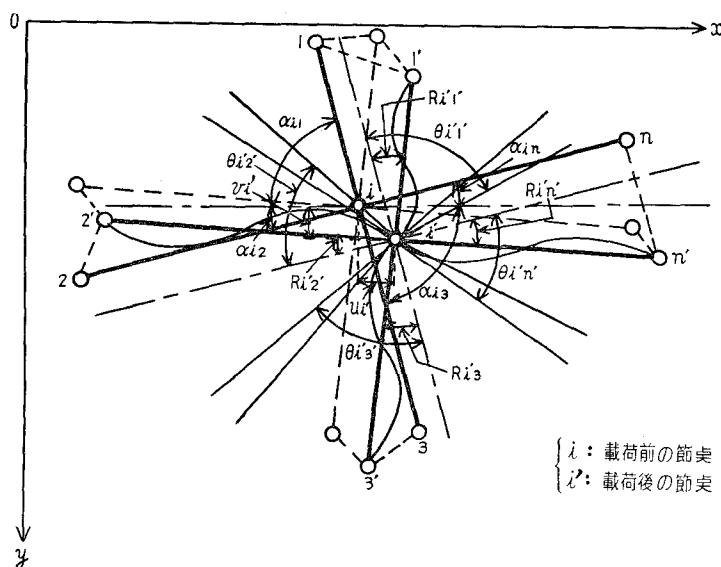
となり、鉅結溶接結合では、その中間の値になる。

## B. 応力法形による解式

第 3 図において、未知力  $S$ ,  $M$  は次にあげる釣合および節点条件式によって、総べてを求める事が出来る。

いま、節点  $i'$  に作用する集中荷重の  $x$ ,  $y$  方向の分力を、それぞれ  $P_{xi'}$ ,  $P_{yi'}$  また、モーメントを  $M_{i'}$  とすれば、釣合条件式は次の如く表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k'=1}^{n'} S_{i'k'} \cos \alpha_{i'k'} + \sum_{k'=1}^{n'} Q_{i'k'} \sin \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{xi'} &= 0 \\ \sum_{k'=1}^{n'} S_{i'k'} \sin \alpha_{i'k'} - \sum_{k'=1}^{n'} Q_{i'k'} \cos \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{yi'} &= 0 \\ \sum_{k'=1}^{n'} M_{i'k'} + \sum_{i'} M_{i'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



第3図 トラス橋における任意の節点の廻りの各部材に関する載荷前後の相対変位図

ただし、(22) 式中の  $Q$  はその部材の性質に応じて、(18), (19) 式または (20), (21) 式を用いる。次に節点条件式は、節点  $i$  に集まる部材  $i'1', i'2', \dots, i'k', \dots, i'n'$  について

$$\theta_{i'1'} = \theta_{i'2'} = \dots = \theta_{i'k'} = \dots = \theta_{i'n'} = \theta_i \quad (23)$$

(23) 式に、部材の性質に応じて (7) または (8) 式を用いれば、節点条件式は  $M, R$  によって表わされる。

### C. 変形法形による解式

次に変形法形<sup>2), 5)</sup> によって部材力を求めて見る。すなわち、未知量として、各節点について  $x$  および  $y$  方向の変位をそれぞれ、 $u_a, v_a$  および  $u_b, v_b$  とすれば、長さの歪  $\Delta l$  は、高次の微小量を無視すれば

$$\Delta l = (u_b - u_a) \frac{\cos \alpha}{l} + (v_b - v_a) \frac{\sin \alpha}{l} \quad (24)$$

部材の受ける曲げモーメントによって生ずる部材長の変化は、2 次的の極めて微小量であるから、これを無視すれば、部材の長さの変化は軸力および温度変化によるものとする事が出来る。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \Delta l &= \frac{S}{E \cdot F} + \omega t \\ \text{ここに } \omega &= \text{部材材料の線膨脹係数} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(24), (25) 式より



$$\frac{S}{EF} + \omega t = (u_b - u_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (v_b - v_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \quad (26)$$

温度変化がない場合には

$$S = \frac{EF}{l'} \left\{ (u_b - u_a) \cos \alpha + (v_b - v_a) \sin \alpha \right\} \quad (27)$$

次に、部材回転角  $R$  は、高次の微小量を無視すれば

$$R = (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} - (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \quad (28)$$

従って、端モーメントは、節点条件式 (23) を考慮に入れて、(11), (12) 式、または、(13), (14) 式より、次の如く求める事が出来る。

圧縮材 AB については

$$M_{ab} = \frac{6EK}{(2\psi + 6EKZ_{ab})(2\psi + 6EKZ_{ba}) - \varphi^2} \left[ \left\{ \theta_{ab} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} (2\psi + 6EKZ_{ba}) + \left\{ \theta_{ba} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} \varphi \right] \quad (29)$$

$$M_{ba} = - \frac{6EK}{(2\psi + 6EKZ_{ab})(2\psi + 6EKZ_{ba}) + \varphi^2} \left[ \left\{ \theta_{ab} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} \varphi + \left\{ \theta_{ba} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} (2\psi + 6EK \cdot Z_{ab}) \right] \quad (30)$$

引張材 AB については

$$M_{ab} = \frac{6EK}{(2\Psi + 6EKZ_{ab})(2\Psi + 6EKZ_{ba}) - \vartheta^2} \left[ \left\{ \theta_{ab} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} (2\Psi + 6EK \cdot Z_{ba}) + \left\{ \theta_{ba} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} \vartheta \right] \quad (31)$$

$$M_{ba} = - \frac{6EK}{(2\Psi + 6EKZ_{ab})(2\Psi + 6EKZ_{ba}) + \vartheta^2} \left[ \left\{ \theta_{ab} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} \vartheta + \left\{ \theta_{ba} - (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l'} + (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l'} \right\} (2\Psi + 6EKZ_{ab}) \right] \quad (32)$$

いま、節点  $i$  が  $i'$  に変位し、 $i$  に連なる部材  $i1, i2, \dots, in$  が、第3図の通り、 $i'1', i'2' \dots i'n'$  に変位したとする。そこで、節点  $i$  の変位を  $u_i, v_i$ 、回転角を  $\theta_i$  とし、節点  $i'$  について釣合条件式 (22) 式に、(18), (19) または、(20), (21) および (27) 式並びに (29), (30) または、(31), (32) 式を代入すれば、次式が得られる。(22) 式の第1公式より、

圧縮材 AB に対しては

$$\begin{aligned}
& \frac{EF}{l'} \sum_k \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \cos \alpha_{i'k'} \\
& + \frac{6EK}{l'} \sum_{k'} \left\{ \frac{(\theta_{i'k'} - R)(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + (\theta_{k'i'} - R)\varphi}{(2\psi + 6EKZ_{i'k'})(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) - \varphi^2} \right. \\
& \left. - \frac{(\theta_{i'k'} - R)\varphi + (\theta_{k'i'} - R)(2\psi + 6EKZ_{i'k'})}{(2\psi + 6EKZ_{ki})(2\psi + 6EKZ_{ik}) + \varphi} \right\} \sin \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{xi'} = 0 \quad (33)
\end{aligned}$$

引張材 AB に対しては,

$$\begin{aligned}
& \frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \cos \alpha_{i'k'} \\
& + \frac{6EK}{l'} \sum_{k'} \left\{ \frac{(\theta_{i'k'} - R)(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + (\theta_{k'i'} - R)\varphi}{(2\psi + 6EKZ_{i'k'})(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) - \varphi^2} \right. \\
& \left. - \frac{(\theta_{i'k'} - R)\varphi + (\theta_{k'i'} - R)(2\psi + 6EKZ_{i'k'})}{(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + \varphi^2} \right\} \sin \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{xi'} = 0 \quad (34)
\end{aligned}$$

また, (22) 式の第2公式より

圧縮材 AB に対しては

$$\begin{aligned}
& \frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \sin \alpha_{i'k'} \\
& - \frac{6EK}{l'} \sum_{k'} \left\{ \frac{(\theta_{i'k'} - R)(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + (\theta_{k'i'} - R)\varphi}{(2\psi + 6EKZ_{i'k'})(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) - \varphi^2} \right. \\
& \left. - \frac{(\theta_{i'k'} - R)\varphi + (\theta_{k'i'} - R)(2\psi + 6EKZ_{i'k'})}{(2\psi + 6EKZ_{ki})(2\psi + 6EKZ_{ik}) + \varphi} \right\} \cos \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{yi'} = 0 \quad (35)
\end{aligned}$$

引張材 AB に対しては

$$\begin{aligned}
& \frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \sin \alpha_{i'k'} \\
& - \frac{6EK}{l'} \sum_{k'} \left\{ \frac{(\theta_{i'k'} - R)(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + (\theta_{k'i'} - R)\varphi}{(2\psi + 6EKZ_{i'k'})(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) - \varphi^2} \right. \\
& \left. - \frac{(\theta_{i'k'} - R)\varphi + (\theta_{k'i'} - R)(2\psi + 6EKZ_{i'k'})}{(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + \varphi^2} \right\} \cos \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{yi'} = 0 \quad (36)
\end{aligned}$$

ただし, 上述の (24) 式~(36) 式における  $u_{i'}$ ,  $v_{i'}$  および  $u_{k'}$ ,  $v_{k'}$  は, 圧縮材, 引張材の別, 座標  $x$ ,  $y$  に対する  $i$  および  $i'$  点の関係位置などにより, 正, 負二通りの場合が考えられるから数値計算に際しては充分注意する必要がある。次に, (22) 式の第3公式より,

圧縮材に対しては

$$\begin{aligned}
& \sum_{k'} \frac{6EK}{(2\psi + 6EKZ_{i'k'})(2\psi + 6EKZ_{k'i'}) - \varphi^2} \left[ \left\{ \theta_{i'k'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right. \\
& \left. \left. + (u_{k'} - u_{i'}) \frac{\sin \alpha_{i'k'}}{l'} \right\} (2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + \left\{ \theta_{k'i'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right. \\
& \left. \left. + (u_{k'} - u_{i'}) \frac{\sin \alpha_{i'k'}}{l'} \right\} \varphi \right] + \sum_{i'} M_{i'} = 0 \quad (37)
\end{aligned}$$

引張材に対しては

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \frac{6EK}{(2\Psi + 6EKZ_{k'k'})} \frac{6EK}{(2\Psi + 6EKZ_{k'i'})} - \Phi^2 \left[ \left\{ \theta_{i'k'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right. \\ \left. \left. + (u_{k'} - u_{i'}) \frac{\sin \alpha_{i'k'}}{l'} \right\} (2\Psi + 6EKZ_{k'i'}) + \left\{ \theta_{k'i'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right. \\ \left. \left. + (u_{k'} - u_{i'}) \frac{\sin \alpha_{i'k'}}{l'} \right\} \Phi \right] + \sum_{i'} M_{i'} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

上述の(33)式～(38)式は、節点剛性の影響を考慮せる一般トラス橋の変形理論によって誘導した基礎方程式である。未知量  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  の総数と条件式の総数が相等しいから、(33), (35), (37) 式および(34), (36), (38) 式によって総べての未知量を計算する事が出来る。 $F$ ,  $\sin$ ,  $\alpha$ ,  $\cos$ ,  $K$ ,  $l$  などは、何れも橋の形状、大さ、各部材の寸法などが与えられれば定まるが、一般基礎方程式の  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  などは、何れも部材の軸力  $S$  の函数であるから、(27) 式より明らかにように、 $u$ ,  $v$  によって決まるものであり、繰返し漸近法によって解く事が出来ると考える。

### 3. 一般トラス橋における基礎方程式の解法

節点剛性の影響を考慮せる一般トラス橋の基礎方程式において、材端モーメント  $M$  の作用は、軸力  $S$  の作用に比し小さいから、 $M$  に随伴して生ずる  $Q$  の作用も小さい。従って、第1次近似値として、釣合条件式(22)中の  $Q$  項を無視した条件式の解を採用する事が出来る。この場合の基礎方程式(33), (35), (37) 式および(34), (36), (38) 式は次のように簡単になる。

圧縮材 AB に対しては

$$\frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \cos \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{xi'} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \sin \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{yi'} = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \frac{6EK}{(2\psi + 6EKZ_{k'k'})} \frac{6EK}{(2\psi + 6EKZ_{k'i'})} - \Phi^2 \left[ \left\{ \theta_{i'k'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right. \\ \left. \left. + (u_{k'} - u_{i'}) \frac{\sin \alpha_{i'k'}}{l'} \right\} (2\psi + 6EKZ_{k'i'}) + \left\{ \theta_{k'i'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right. \\ \left. \left. + (u_{k'} - u_{i'}) \frac{\sin \alpha_{i'k'}}{l'} \right\} \Phi \right] + \sum_{i'} M_{i'} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

引張材 AB に対しては

$$\frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \cos \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{xi'} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{EF}{l'} \sum_{k'} \left\{ (u_{k'} - u_{i'}) \cos \alpha_{i'k'} + (v_{k'} - v_{i'}) \sin \alpha_{i'k'} \right\} \sin \alpha_{i'k'} + \sum_{i'} P_{yi'} = 0 \quad (43)$$

$$\sum_{k'} \frac{6EK}{(2\Psi + 6EKZ_{k'k'})} \frac{6EK}{(2\Psi + 6EKZ_{k'i'})} - \Phi^2 \left[ \left\{ \theta_{i'k'} - (v_{k'} - v_{i'}) \frac{\cos \alpha_{i'k'}}{l'} \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & + (u_{k'} - u_{l'}) \frac{\sin \alpha_{l'k'}}{l'} \left\{ (2\Psi + 6EKZ_{k'l'}) + \left\{ \theta_{k'l'} - (v_{k'} - v_{l'}) \frac{\cos \alpha_{l'k'}}{l'} \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_{k'} - u_{l'}) \frac{\sin \alpha_{l'k'}}{l'} \right\} \Phi \right\} + \sum_{l'} M_{l'} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

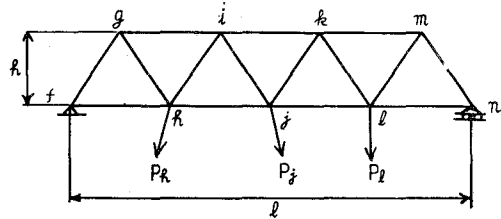
上述の (39), (40), (41) 式および (42), (43), (44) 式よりそれぞれ, 未知量  $u, v, \theta$  を求める事が出来る。

#### 4. 一般トラス橋の座屈または弾性破壊荷重に関する解法

第4図に示すような一般トラス橋の節点  $i$  について, 節点結合条件式を作ってみれば, 次のように3つになる。

$$\theta_{ig} = \theta_{ih}, \quad \theta_{ig} = \theta_{ij}, \quad \theta_{ig} = \theta_{ik} \quad (45)$$

いま, 圧縮部材  $ig, ik$  について, 節点の結合条件式 (45) の第3式に (7) に相当する式を作って代入すると次式ようになる。



第4図 節点剛性を考慮せる一般トラス橋の座屈または弾性破壊に関する図

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6EK_{ig}} (2\psi_{ig} M_{ig} - \varphi_{ig} M_{gi} + 6EK_{ig} M_{ig} Z_{ig} + 6EK_{ig} R_{ig}) \\ & = \frac{1}{6EK_{ik}} (2\psi_{ik} M_{ik} - \varphi_{ik} M_{ki} + 6EK_{ik} M_{ik} Z_{ik} + 6EK_{ik} R_{ik}) \end{aligned}$$

両辺に  $6EK_{ig}K_{ik}$  を乗じ, 整理すれば,

$$\begin{aligned} & K_{ik}\varphi_{ig}M_{gi} - 2K_{ik}\psi_{ig}M_{ig} + 2K_{ig}\psi_{ik}M_{ik} - K_{ig}\varphi_{ik}M_{ki} \\ & = 6EK_{ig}K_{ik} \{ (M_{ig}Z_{ig} - M_{ik}Z_{ik}) + (R_{ig} - R_{ik}) \} \end{aligned} \quad (46)$$

同様にして, 他の上弦材節点における圧縮部材についても節点の結合条件式を求める事が出来るから, 必ず未知の材端モーメントの数と同数だけの式が得られる事になる。荷重  $P$  を次第に増加すると, トラスにおける圧縮部材は座屈するか, 弾性破壊を生ずる。座屈を生じた場合には, 部材の材端モーメントは  $\infty$  になる筈である。すなわち, 座屈の条件式は (46) 式と同形の節点結合条件式の材端モーメントの係数で作った行列式を 0 に等しいとおいた式で表わされる。この座屈条件式より, 軸力  $S$  従って, 座屈に必要な荷重  $P$  が求められる事になる。トラスにおける圧縮部材の細長比が小さい場合には, 座屈を生ずる前に部材応力が弾性限度を超過して弾性破壊を生ずる事がある。この場合には, 基礎方程式の解法に従って部材力  $S$ , モーメント  $M$  を求め, これから部材応力度を計算し, 弾性限度との相対関係について吟味して見る必要がある。

また, 節点  $h$  に対し, 引張材  $fh, hj$  について, 節点の結合条件式を作ると次の通りである。

$$\theta_{hf} = \theta_{hg}, \quad \theta_{hf} = \theta_{hi}, \quad \theta_{hf} = \theta_{hj} \quad (47)$$

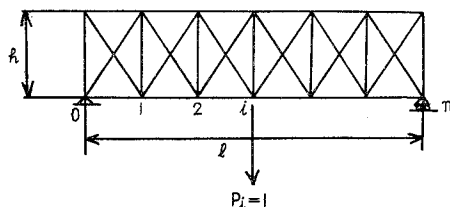
圧縮材の場合と同様にして, (8) 式に相当する式を作つて (47) 式の第 3 公式に代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6EK_{hf}} (2\Psi_{hf}M_{hf} - \Phi_{hf}M_{hf} + 6EK_{hf}M_{hf}Z_{hf} + 6EK_{hf}R_{hf}) \\ &= \frac{1}{6EK_{hj}} (2\Psi_{hj}M_{hj} - \Phi_{hj}M_{jh} + 6EK_{hj}M_{hj}Z_{hj} + 6EK_{hj}R_{hj}) \end{aligned}$$

両辺に,  $6EK_{hf}K_{hj}$  を乗じ, 整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & K_{hj}\Phi_{hf}M_{hf} - 2K_{hj}\Psi_{hf}M_{hf} + 2K_{hf}\Psi_{hj}M_{hj} - K_{hf}\Phi_{hj}M_{jh} \\ &= 6EK_{hf}K_{hj} \{ (M_{hf}Z_{hf} - M_{hj}Z_{hj}) + (R_{hf} - R_{hj}) \} \end{aligned} \quad (48)$$

同様に, 他の下弦材節点における引張部材についても, 節点の結合条件式を求める事が出来るから未知の材端モーメントの数と同数だけの式が得られる事になる。荷重  $P$  を次第に増加すると, トラスにおける引張部材は弾性限度を超過して弾性破壊を生ずる。この場合は基礎方程式の解法に従つて, 部材力  $S$ , モーメント  $M$  を求め, これから部材応力度を計算し, 弾性限度との相対関係について吟味しなければならない。



第5図 節点剛性を考慮せる一般トラス橋のタワミに関する図

### 5. 一般トラス橋の厳密タワミ解法<sup>6),7)</sup>

第5図の如き一般トラス橋の任意の点におけるタワミ解式を作つて見る。いま, 可能変形法則<sup>8)</sup>において, 仮想荷重  $P_i = 1$  および実験荷重による変位状態を想定すれば, 任意の点  $i$  におけるトラス橋のタワミ一般式は, 次の如く表わされる。

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_i &= \sum \bar{S} \cdot S \cdot \mu \frac{s}{EA} + \sum \bar{M} \cdot M \cdot \nu \frac{s}{EI} + \kappa \sum \bar{Q} \cdot Q \cdot \lambda \frac{s}{GA} \\ &+ \sum \bar{S} \cdot \epsilon \cdot t \cdot \mu \cdot s + \sum \bar{M} \cdot \epsilon \frac{dt}{h} \cdot \nu \cdot s \end{aligned} \quad (49)$$

いま, 温度変化を無視すれば, (50) 式が得られる。

$$1 \cdot \delta_i = \sum \bar{S} \cdot S \cdot \mu \frac{s}{EA} + \sum \bar{M} \cdot M \cdot \nu \frac{s}{EI} + \kappa \sum \bar{Q} \cdot Q \cdot \lambda \frac{s}{GA} \quad (50)$$

(50) 式において

$\delta_i$ : 任意の点  $i$  における垂直タワミ

$s$ : 部材の全長 (節点間距離)

$E$ : 弾性係数

$A$ : 部材の断面積

$I$ : 断面の慣性モーメント

$$\left. \begin{aligned}
 S: & \text{ 部材の実軸力} \\
 \bar{S}: & i \text{ 点に } P=1 \text{ が作用するときの部材の仮想軸力} \\
 M_{mn}, M_{nm}: & \text{ 部材の左, 右節点における材端実モーメントの平均値} \\
 M: & \text{ 部材における左右材端実モーメントの平均の値} \\
 \bar{M}: & i \text{ 点に } P=1 \text{ が作用するときの部材における左, 右材端仮想モーメントの平均値} \\
 Q: & \text{ 部材の実剪断力} \\
 \bar{Q}: & i \text{ 点に } P=1 \text{ が作用するときの部材の仮想剪断力} \\
 G: & \text{ 剪断弾性係数} \\
 \mu, \nu, \lambda: & \text{ 部材の軸力, 曲げモーメント, 剪断力に関する節点の剛性による係数} \\
 \kappa: & \text{ 剪断弾性補正係数の逆数} \\
 s_e: & \text{ 有効部材長}
 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$\mu, \nu, \lambda$  などの係数は, 節点の剛性によって定まるから模型実験などによって決定すべきであるが, 理論的にこれを算定するには次の如き計算公式を用いるのも一方法であると考え

#### A. 部材に軸力のみ作用する場合の節点剛性による係数 $\mu$

##### i. 軸圧縮力を受けるとき

$$\left. \begin{aligned}
 \text{全部材長 } s &= \sqrt{2.5} \pi \sqrt{\frac{EI}{S_k}} = 1.58\pi \sqrt{\frac{EI}{S_k}} \\
 \text{部材有効長 } s_e &= \pi \sqrt{\frac{EI}{S'_k}} \\
 S_k: & \text{ 節点が鉸の場合の軸圧縮座屈荷重<sup>9)</sup>} \\
 S'_k: & \text{ 節点がある程度の剛性を有する場合の軸圧縮座屈荷重} \\
 \text{係数 } \mu &= \frac{s_e}{s} = 0.633 \sqrt{\frac{S_k}{S'_k}}
 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

##### ii. 軸引張力を受けるとき

$$\left. \begin{aligned}
 \text{部材有効長 } s_e &= \frac{1}{2} \left( s + \pi \sqrt{\frac{EI}{S'_k}} \right) \\
 \mu &= \frac{s_e}{s} \\
 s: & \text{ 部材の全長} \\
 S'_k: & (52) \text{ 式の記号参照}
 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

#### B. 部材に, 材端モーメント, 剪断力などが作用する場合の節点剛性による係数 $\nu, \lambda$

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{部材有効長 } s_e = \pi \sqrt{\frac{s \cdot G \cdot I_{\min}}{M_k}} \\
 &I_{\min}: \text{断面の最小慣性モーメント} \\
 &M_k: \text{部材の両端に曲げモーメントを受ける場合の横座屈曲げモーメント}^{9)} \\
 &\nu, \lambda = \frac{s_e}{s}
 \end{aligned} \right\} (54)$$

尚, (52)~(54)におけるその他の記号は, (51)の記号参照の事。

以上の公式によるか模型実験などによって  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  の係数が決定したならば, (49) または (50) 式によって任意の点におけるタワミを算出する事が出来る。ただし, (49), (50) の解式に含まれる  $\bar{S}$ ,  $S$ ,  $\bar{M}$ ,  $M$ ,  $\bar{Q}$ ,  $Q$  などの計算は, 前述の変形理論によって誘導した解式 (1)~(48) などを用いて厳密に行なうべきである。

## 6. 結 言

一般に構造物が過荷重を受け極限状態にある場合の解法は, 場合によっては更に基礎的な有限変位理論<sup>10)</sup>または塑性理論などに基づいて行なわれるべきものと思うが, 節点剛性の性質鋼材の強度などより考察し, トラス橋の解法としては, 節点の相対変位と部材の弾性変形を考慮した厳密解法, すなわち前述の解式 (1)~(54) を用いて計算すれば充分間に合うものと思う。またトラス橋の節点は, 鉚結であっても溶接結合とするも, その接合状態から見て鉚結と剛結との中間的構造を示し, 所謂“不完全剛結,, と見なす事が出来る。この場合節点の接合状態に関する係数  $Z$  および  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  などの決定方法が問題となる。これらの係数は原則としては模型実験などによって定むべきものと思うが, それについてはトラス橋の厳密計算例などと共に次の機会に譲る事とする。

尚, 本論文を纏めるに当っては, 次に挙げる参考文献に負う処多く, それらの著者に深謝すると共に, この一連の研究に常に御支援下さった北大工学部, 今俊三教授, 酒井忠明教授, 東大工学部, 奥村敏恵教授, 日本国有鉄道技術研究所, 同構造設計事務所, 室蘭工業大学土木工学教室の教職員各位などに対し謝意を表するほか, 論文における図面のトレースに御協力頂いた本学土木工学教室, 渡部公治君に感謝する次第である。

最後に本研究は文部省科学研究交付金を受けた研究の一部であり, 心から謝意を表すると共に今後もこの一連の研究を続行する予定なる事を付記する。

(昭和 37 年 4 月 30 日受理)

## 文 献

- 1) 中村作太郎・番匠 勳・志村政雄: 土木学会第 16 回年次学術講演会講演概要, II-53, 119, 120 (1961).
- 2) 小西一郎: 土木学会論文集, No. 9, 1~9 (1950).

- 3) 山崎徳也：九州大学工学集報, **25-1**, 5~8 (1952).
- 4) 山崎徳也：土木学会誌, **46-2**, 9~17 (1961).
- 5) 成岡昌夫・山本知弘：土木学会誌, **46-2**, 9~17 (1961).
- 6) 中村作太郎・番匠 勲：土木学会北海道支部技術資料, **No. 18**, 14~25 (1962).
- 7) 中村作太郎：室蘭工業大学研究報告, **3-3**, 73~89 (1960).
- 8) 成瀬勝武：弾性橋梁, 3版, 15~49 (東京, 1953).
- 9) 長柱研究委員会：弾性安定要覧, 2版, 101~258 (東京, 1960).
- 10) 倉西正嗣：弾性学, 2版, 31~41 (東京, 1957).